PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 02

CLARIFICĂRI, TRANSFORMATA FOURIER

Cristian Rusu

DATA TRECUTĂ

- semnale continue și discrete
- semnale sinusoidale
- eșantionare

CUPRINS

- clarificări despre funcții continue, discrete și eșantionare

- numere complexe, formula lui Euler

- corelația între semnale
    - discrete
    - continue

- transformatele Fourier

SINUSOIDE

- **funcția continuă sinusoidală**

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

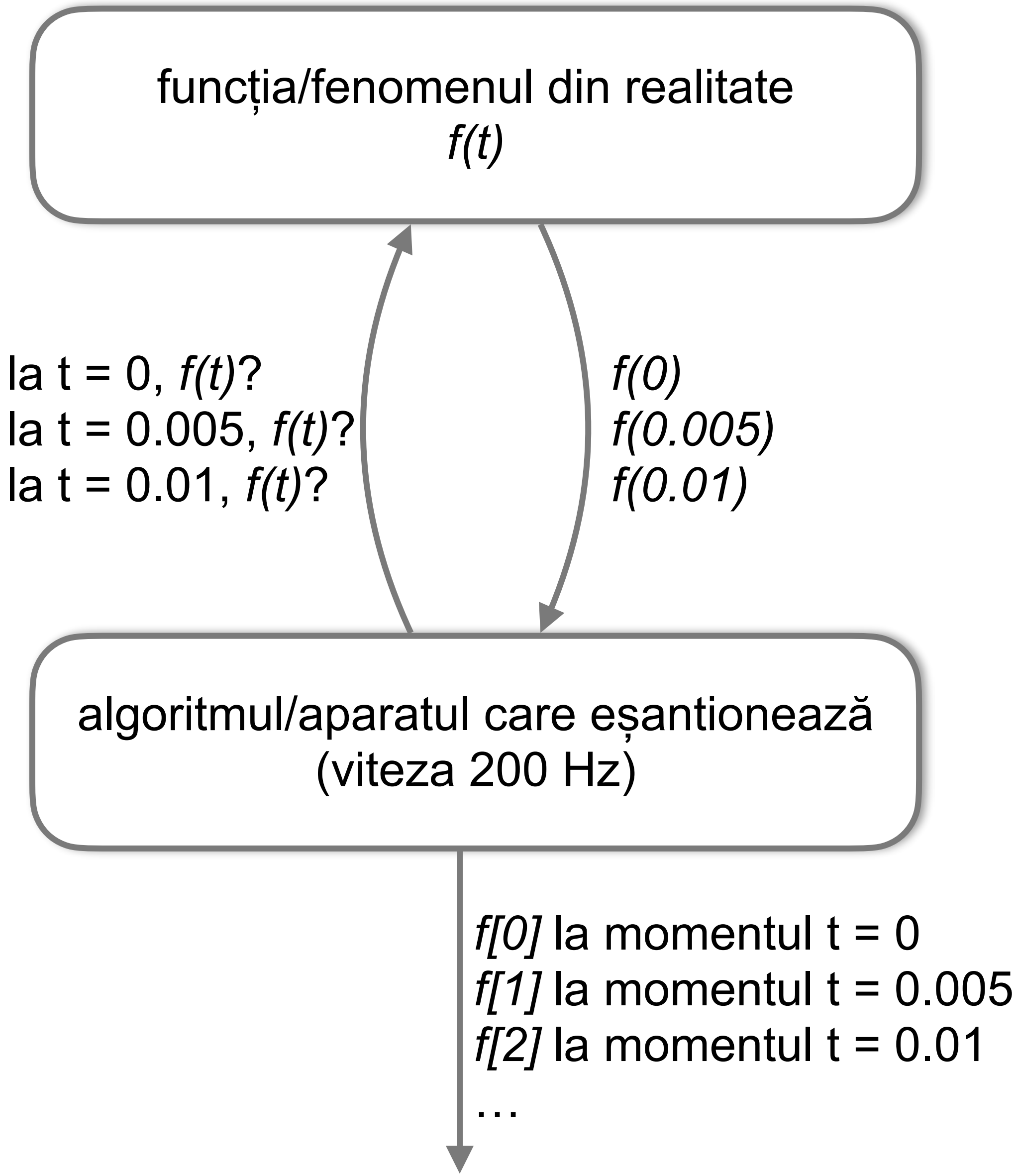
- A **se numește amplitudine**
- φ **este faza**
- t **este variabila de timp (în secunde, în general)**
- f_0 **este frecvența sinusoidei (Hz, numărul de oscilații într-o secundă)**
- $f_0 t$ **este numărul de oscilații măsurat**
- $2\pi f_0 t$ **unghiul măsurat (radiani)**

- **funcția discretă sinusoidală**

$$x[n] = A\sin(2\pi f_0 n t_s + \varphi)$$

- **timpul** t **nu mai este continuu, este discret** nt_s **(pas egal)**
- **am trecut de la o funcție, la un șir (vector)**

PROCESUL DE EȘANTIONARE



PROCESUL DE EȘANTIONARE

frecvența f_0 nu are nicio legătură cu 200 Hz

funcția/fenomenul din realitate
f(t) = *sin*$(2\pi f_0 t)$

la t = 0, *f(t)*?
la t = 0.005, *f(t)*?
la t = 0.01, *f(t)*?

f(0)
f(0.005)
f(0.01)

algoritmul/aparatul care eșantionează
(viteza 200 Hz)

f[0] la momentul t = 0
f[1] la momentul t = 0.005
f[2] la momentul t = 0.01
…

dacă f_0 este mult mai mare decât 200 Hz atunci $f(t)$ este prea rapid pentru alg. de eșantionare. asta se poate întâmpla.

PROCESUL DE EȘANTIONARE

plotting *f_desen* care aproximează foarte fin *f(t)*

funcția/fenomenul din realitate
$f(t) = sin(2\pi f_0 t)$

în general, noi nu știm cine este *f(t)*. la laborator știm

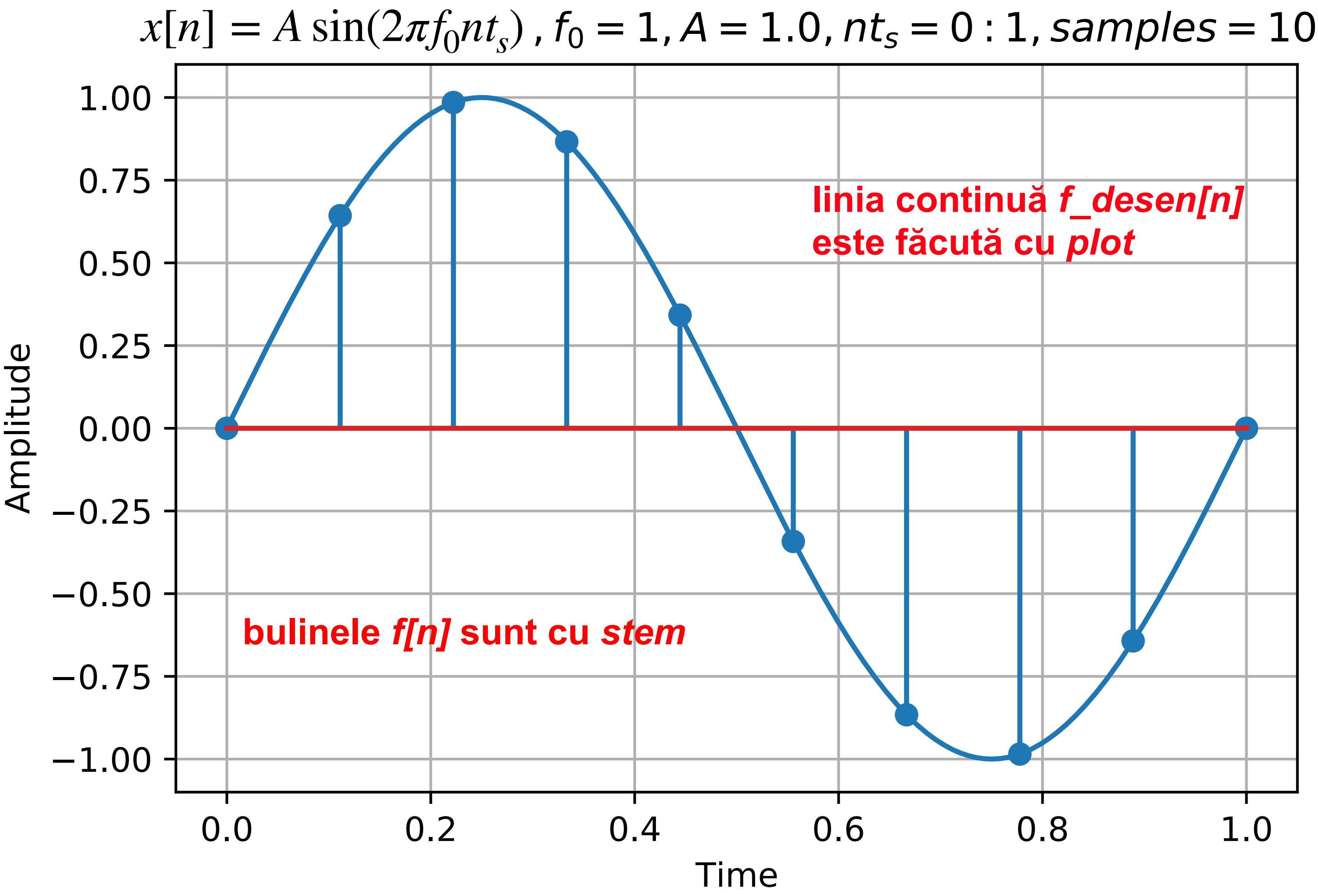
cum desenăm *f(t)*? (este dificil pentru că *f(t)* este infinit, deci ar fi imposibil)

soluția: vom aproxima *f(t)* cu o nouă funcție *f_desen[n]*, asta e eșantionat des (pentru că vrem un desen cât mai neted) și nu are legătură cu 200 Hz

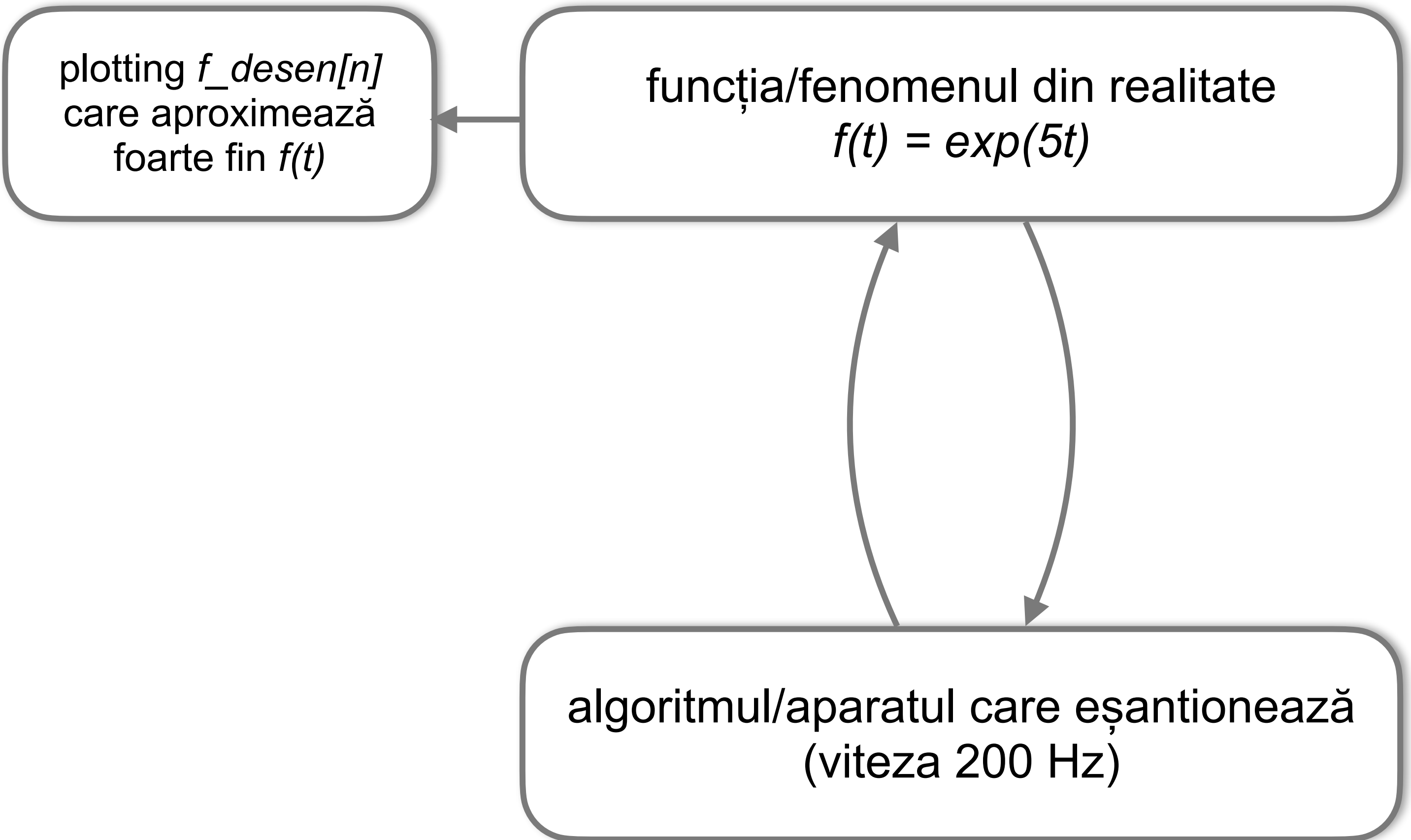
algoritmul/aparatul care eșantionează
(viteza 200 Hz)

f[0] la momentul t = 0
f[1] la momentul t = 0.005
f[2] la momentul t = 0.01
…

EXEMPLE, EȘANTIONARE



PROCESUL DE EȘANTIONARE



f[0] la momentul t = 0
f[1] la momentul t = 0.005
f[2] la momentul t = 0.01
…

Rezumat:
f[n] este *f(t)* eșantionat la fiecare 0.005 secunde
f_desen[n] este *f(t)* eșantionat la 0.00003 secunde (dar asta nu se întâmplă în realitate, asta e doar pentru plot)
aici în loc de 0.00003 am vrea să fie ceva cât mai mic, preferabil un ϵ

PROCESUL DE EȘANTIONARE

- definiția frecvenței de eșantionare $f_0 = \frac{1}{T}$[Hz]
  - e din fizică
  - funcționează pentru orice funcție
  - se citește: 200 Hz, de 200 de ori pe secundă
  - este echivalent cu: la fiecare 1/200 secunde
  - eșantionăm mereu uniform
- în laborator, inițial, era scris $f_0 = \frac{2\pi}{T}$[Hz]
  - de ce?

PROCESUL DE EȘANTIONARE

- definiția frecvenței de eșantionare $f_0 = \frac{1}{T}$[Hz]
  - e din fizică
  - funcționează pentru orice funcție
  - se citește: 200 Hz, de 200 de ori pe secundă
  - este echivalent cu: la fiecare T = 1/200 secunde
  - eșantionăm mereu uniform

- în laborator, inițial, era scris $f_0 = \frac{2\pi}{T}$[Hz]
  - funcțiile din laborator erau periodice, perioada 2π
  - adică funcția este unică doar pe $[0,2\pi]$, în rest se repetă
  - nu are rost să eșantionăm pe secundă (putem, dar există o variantă și mai bună)
  - are rost să știm cât de des eșantionăm la fiecare 2π secunde

NUMERE COMPLEXE (REVIEW)

- definiție și intuiție
- câteva proprietăți
- “formula” lui Euler
- consecințe
    - trigonometrie
    - calcule matematice
    - fizică

CORELAȚIA

- să presupunem că avem doi vectori $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$
- corelația dintre $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ este

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_2 \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|_2}$$

acesta e un abuz de notație pentru că scad dintr-un vector o valoare (înseamnă că scad din fiecare element din vector valoarea mediei)

- variabilele cu bară sunt media $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i$
- formula de mai sus este echivalentă cu

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \; x_i - \bar{\mathbf{x}} \;^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \; y_i - \bar{\mathbf{y}} \;^2}}$$

CORELAȚIA

- formula de mai sus este echivalentă cu

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \ {x_i - \bar{\mathbf{x}}}^{\ 2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \ {y_i - \bar{\mathbf{y}}}^{\ 2}}}$$

- exemplu:
    - x = [2, 2, 4, 4], media este 3
        - x = [-1, -1, 1, 1], norma este 2
    - y = [-5, 5, -5, 5], media este 0
        - y = [-5, 5, -5, 5], norma este $\sqrt{100}$
    - $c(\mathbf{x},\mathbf{x}) = ?$
    - $c(\mathbf{y},\mathbf{y}) = ?$
    - $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ?$

CORELAȚIA

- **formula de mai sus este echivalentă cu**

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \; x_i - \bar{\mathbf{x}}\;^{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \; y_i - \bar{\mathbf{y}}\;^{2}}}$$

- **exemplu:**
    - **x = [2, 2, 4, 4], media este 3**
        - **x = [-1, -1, 1, 1], norma este 2**
    - **y = [-5, 5, -5, 5], media este 0**
        - **y = [-5, 5, -5, 5], norma este** $\sqrt{100}$
    - $c(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \dfrac{1+1+1+1}{2\times 2} = 1$
    - $c(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \dfrac{25+25+25+25}{\sqrt{100}\times\sqrt{100}} = 1$
    - $c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \dfrac{5-5-5+5}{2\times\sqrt{100}} = 0$

CORELAȚIA

- **formula de mai sus este echivalentă cu**

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{\mathbf{x}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \left(x_i - \bar{\mathbf{x}}\right)^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \left(y_i - \bar{\mathbf{y}}\right)^2}}$$

- **proprietăți:**
  - $c(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$
  - $c(\mathbf{y}, -\mathbf{y}) = c(-\mathbf{y}, \mathbf{y}) = -1$
  - $-1 \leq c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1$
  - **este defapt cosinusul unghiului dintre $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$**

- **putem să scădem media din start și atunci avem, simplificat**

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} y_i^2}}$$

CORELAȚIA

- **putem să scădem media din start și atunci avem, simplificat**

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^{\;2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} y_i^{\;2}}}$$

- **putem să scalăm fiecare vector împărțind cu norma lui**

$$c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

Obs: Atenție când vectorii cu care lucrăm conțin numere complexe, atunci toate "transpusele" devin "transpuse și complex conjugate": $\mathbf{x}^H\mathbf{y}$ în loc de $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$

TRANSFORMATA FOURIER

Transformata Fourier a unei funcții = corelația funcției cu funcțiile sinusoidale

Transformata Fourier a unei funcții = corelația funcției cu exponențiala complexă

Transformata Fourier Discretă a unui vector = corelația vectorului cu vectorii sinusoidali

Transformata Fourier Discretă a unui vector = corelația vectorului cu exponențiala complexă

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

- **ni se dă un vector $\mathbf{x}$, de dimensiune n**

- **Transformata Fourier Discretă:**
  - **componenta Fourier 0 $=$ (exponențiala complexă 0$)^T\mathbf{x}$**
  - **componenta Fourier 1 $=$ (exponențiala complexă 1$)^T\mathbf{x}$**

    …
  - **componenta Fourier $n-1 =$ (exponențiala complexă $n-1)^T\mathbf{x}$**

- **formula pentru componenta Fourier m**

$$X[m] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] e^{-2\pi j k \frac{m}{n}} \text{ pentru } m = 0, \ldots, n-1$$

TRANSFORMATA FOURIER CONTINUĂ

- **ni se dă o funcție** $f(t)$ **definită pe** $[-\infty, +\infty]$

- **Transformata Fourier Continuă:**

produsul scalar de la cazul discret a devenit integrală

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \times (\textbf{exponențiala complexă})\ dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j \omega t} dt$$

- $F(\omega)$ **este un număr complex pentru fiecare frecvență** ω**, partea reală spune cât** $\cos(\omega)$ **este în** $f(t)$**, iar partea imaginară face același lucru pentru** $\sin(\omega)$
- $F(\omega)$ **ne spune câtă frecvență** ω **este în total în** $f(t)$